

Pelabelan Total Sisi Ajaib Super dan (a, d) Anti Ajaib Super Pada Graf $C_n \odot P_m$

Muhammad Zainal Ilmi¹, Sigit Pancahayani^{2}, and Annisa Rahmita Soemarsono.³*

¹ *Jurusan Matematika dan Teknologi Informasi, Institut Teknologi Kalimantan, Balikpapan*
email: zainalilmi876@gmail.com

² *Jurusan Matematika dan Teknologi Informasi, Institut Teknologi Kalimantan, Balikpapan*
email: spancahayani@lecturer.itk.ac.id

³ *Jurusan Matematika dan Teknologi Informasi, Institut Teknologi Kalimantan, Balikpapan*
email: annisarahmitas@lecturer.itk.ac.id

Abstract

Graph theory is part of the branch of mathematics with the aim of facilitating the solution of a problem. One of the topics in graph theory is graph labeling. Graph labeling is a one-to-one mapping that maps every element in the graph (vertices, edges, or both) to a set of positive integers. Positive numbers which are mapping values for each element in the graph are called labels. In addition, there is also a weight term which is the number of labels associated with graph elements denoted by W . The purpose of this research is to obtain a super (a, d) -magic and anti-magic edges labeling on $C_n \odot P_m$ with an odd $n \geq 3$ and $m \leq 3$, where $m, n \in \mathbb{N}$. The results show that the graph $C_n \odot P_m$ has a super edge (a, d) -anti-magic total labeling with $a = mn + \frac{3n+1}{2} + 2$ and $d = 2$ for every odd $n \geq 3$ and $m \leq 3$, where $m, n \in \mathbb{N}$ and the graph resulting from the operation $C_n \odot P_m$ have a super edge magic total labeling with the magic constant $k = \frac{3(2mn+n+1)}{2}$.

Keywords: graph, labeling, corona, magic, anti-magic

Abstrak

Teori graf merupakan bagian dari cabang matematika dengan tujuan mempermudah pemecahan suatu masalah. Salah satu topik dalam teori graf adalah pelabelan graf. Pelabelan graf adalah pemetaan satu-satu yang memetakan setiap elemen dalam graf (titik, sisi, atau keduanya) ke himpunan bilangan bulat positif. Bilangan positif yang memetakan nilai untuk setiap elemen dalam grafik disebut label. Selain itu, terdapat juga istilah bobot yaitu total label yang terkait dengan elemen graf yang dinotasikan dengan W . Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendapatkan pelabelan sisi ajaib dan antiajaib super pada graf hasil operasi korona antara graf siklus dan lintasan, yaitu $C_n \odot P_m$ dengan $n > 3$ ganjil dan $m \leq 3$ dimana $m, n \in \mathbb{N}$. Hasil penelitian yang diperoleh menunjukkan bahwa graf $C_n \odot P_m$ memuat pelabelan total sisi ajaib super dengan konstanta ajaib $k = \frac{3(2mn+n+1)}{2}$ dan memuat pula pelabelan total sisi (a, d) -anti ajaib super dengan $a = mn + \frac{3n+1}{2} + 2$ and $d = 2$ untuk setiap $n > 3$ ganjil dan $m \leq 3$ dimana $m, n \in \mathbb{N}$.

Kata Kunci: graf, pelabelan, korona, ajaib, anti ajaib

1. Pendahuluan

1.1 Latar Belakang

Teori Graf adalah bagian dari cabang ilmu matematika dengan tujuan mempermudah penyelesaian suatu masalah. Teori graf timbul pada tahun 1736, pada saat Leonhard Euler mencari solusi dari permasalahan yang populer pada saat itu, yaitu Jembatan Königsberg. Teori ini sudah mengalami berbagai pengembangan baik dari sisi teori maupun terapannya. Beberapa masalah dalam dunia nyata dapat diselesaikan menggunakan konsep-konsep dalam teori graf, misal masalah jaringan di bidang ilmu

komputer, riset operasi, komunikasi, dan ilmu-ilmu sosial atau ilmu pengetahuan alam (Chartrand, 1977; Deo 1980).

Pada teori graf, kita mengenal bahwa sebuah graf G dinyatakan sebagai pasangan terurut dua himpunan, yaitu $V(G)$ disebut titik dan $E(G)$ disebut sisi yang di mana setiap elemen $E(G)$ adalah pasangan tak berurut dari titik yang ada di $V(G)$ (Suryanto, 1986).

Pelabelan graf adalah salah satu topik dari teori graf. Sadlăč (1964) adalah orang yang pertama kali memperkenalkan pelabelan graf, kemudian Stewart (1966), serta Kotzig dan Rosa (1967). Pelabelan sendiri merupakan suatu fungsi bijektif (satu- satu dan pada) yang memetakan titik dan/ atau sisi ke suatu bilangan asli. Pelabelan yang memetakan titik dinamakan pelabelan titik, sedangkan pelabelan yang memetakan sisi maka disebut pelabelan sisi. Jika pelabelan memetakan keduanya, yaitu titik dan sisi, pelabelan tersebut dinamakan pelabelan total (Masyitoh, 2019).

Pelabelan telah banyak berkembang menjadi berbagai jenis, antara lain pelabelan ajaib dan anti ajaib. Suatu pelabelan dikatakan ajaib jika hasil pelabelan tersebut memiliki bobot yang sama pada simpul atau sisinya, sedangkan jika pelabelan tersebut memiliki bobot yang berbeda maka pelabelan dikatakan pelabelan anti ajaib (Masyitoh, 2019).

Beberapa penelitian sebelumnya telah banyak mengangkat mengenai pelabelan total super (a, d) -sisi ajaib dan anti ajaib yang dipublikasikan, yaitu Dafik dkk. (2013) tentang *Super Antimagicness of Triangular Book and Diamond Ladder Graphs*, Hussain, dkk. Djoni (2014) tentang pelabelan total super (a, d) -sisi *antimagic* pada graf Bianglala, dan Saputra, Angga (2016) tentang Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi *Antimagic* Pada Korona $C_n \odot P_2$.

Berdasarkan penjelasan di atas mengenai pelabelan total super sisi ajaib dan anti ajaib pada graf $C_n \odot P_m$. Penelitian ini akan dikaji mengenai pelabelan total super (a, d) – sisi ajaib dan anti ajaib pada graf hasil operasi $C_n \odot P_m$.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, maka permasalahan pada penelitian ini yaitu bagaimana pola pelabelan total super (a, d) – sisi ajaib dan anti ajaib pada graf hasil operasi $C_n \odot P_m$.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan dari penelitian ini yaitu untuk memperoleh pola pelabelan total super (a, d) – sisi ajaib dan anti ajaib pada graf hasil operasi $C_n \odot P_m$.

1.4 Studi Literatur

Graf G dinyatakan sebagai pasangan terurut dua himpunan, yaitu $V(G)$ disebut titik dan $E(G)$ disebut sisi yang di mana setiap elemen $E(G)$ adalah pasangan tak berurut dari titik yang ada di $V(G)$. Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v (Suryanto. 1986).

Misalkan terdapat graf G merupakan graf dengan titik $V(G)$ dan sisi $E(G)$. Suatu graf dikatakan pelabelan total sisi ajaib, jika graf G dengan v titik dan e sisi merupakan suatu fungsi satu-satu dan pada $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, v + e\}$ sedemikian hingga $f(u) + f(v) = f(uv) = k$, dengan $uv \in E(G)$ dan k konstanta. Fungsi f disebut pelabelan total super sisi ajaib dari graf G apabila $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, v\}$.

Di sisi lain, pelabelan total (a, d) -sisi anti ajaib diperkenalkan pada tahun 2000 oleh Rinovia Simanjuntak, Mirka Miller, dan Francois Bertault. Pelabelan total (a, d) -sisi anti ajaib pada graf G didefinisikan sebagai fungsi bijektif dari $V(G) \cup E(G)$ pada $\{1, 2, \dots, |V| + |E|\}$ dalam himpunan $\{f(v) + f(uv) + f(u) | uv \in E\}$, di mana v adalah jarak pada setiap V adalah $\{a, a + d, \dots, a + (|V| - 1)d\}$ (Gallian, 2009). Apabila semua sisi memiliki bobot berbeda dan himpunan bobot membentuk suatu barisan aritmatika dengan a merupakan suku pertama dan d merupakan beda maka disebut sebagai pelabelan total (a, d) -sisi anti ajaib.

Operasi korona dari dua buah graf, misal graf G dan H didefinisikan sebagai graf yang diduplikasi sebanyak $|V(G)|$ yaitu H_i , dengan $i = 1, 2, \dots, |V(G)|$, kemudian menghubungkan titik ke- i dari G ke setiap titik di H_i (Mursyidah dan Rahmawati, 2017).

2. Metode

2.1 Pembentukan Graf Hasil Operasi $C_n \odot P_m$

Pada tahap ini, penulis membentuk graf hasil operasi $C_n \odot P_m$ agar mudah saat dilakukan perhitungan untuk mencari total super sisi ajaib dan anti ajaib dari graf tersebut. Dimana dengan nilai $n \geq 3$ ganjil, $n \in N$, $m \leq 3$, $m \in N$, dan $d = 0$ dan 2.

2.2 Perhitungan Pelabelan

Pada tahap ini dilakukan perhitungan dasar pelabelan total super sisi ajaib dan anti pada graf hasil operasi $C_n \odot P_m$ yang telah dibentuk.

2.3 Pembentukan Teorema

Tahap ini merupakan tahap dari kesimpulan di mana akan dibentuk teorema. Teorema yang dihasilkan berupa fungsi dari pelabelan dan pembobotan yang dapat digunakan untuk membentuk total super sisi ajaib dan anti ajaib pada graf korona $C_n \odot P_m$.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Pola Pelabelan Total Super (a, d) – Sisi Ajaib dan Anti Ajaib Pada Graf $C_n \odot P_m$

Graf hasil operasi $C_n \odot P_m$ merupakan graf yang diperoleh dengan menggandakan graf P_m sebanyak n , kemudian titik ke- i pada graf C_n dihubungkan ke setiap titik P_m , dimana $1 \leq i \leq n$. Jika n merupakan banyaknya titik pada graf C_n dan m merupakan banyaknya titik pada graf P_m , maka banyaknya simpul dan sisi pada graf hasil operasi $C_n \odot P_m$ adalah $|V(C_n \odot P_m)| = n(1 + m)$ dan $|E(C_n \odot P_m)| = 2mn$.

Himpunan titik dan sisi pada graf $C_n \odot P_m$ adalah sebagai berikut

1. Himpunan titik untuk $C_n \odot P_m$ adalah sebagai berikut

$$V(C_n \odot P_m) = \{v_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_{i,j}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

2. Himpunan sisi untuk $C_n \odot P_m$ adalah sebagai berikut

$$E(C_n \odot P_m) = \{v_i v_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_n v_1\} \cup \{v_i v_{i,j}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{v_{i,j} v_{i,m}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\}$$

dimana v_i adalah titik dari graf C_n dan $v_{i,j}, v_{i,m}$ adalah titik dari graf P_m .

Berdasarkan definisi operasi korona dan pelabelan total super (a, d) – sisi ajaib dan anti ajaib pada graf $C_n \odot P_m$, maka diperoleh teorema sebagai berikut

Teorema 1. Graf $C_n \odot P_m$ dengan $n \geq 3$ ganjil, $n \in N$, $m \leq 3$, $m \in N$, memuat pelabelan total super (a, d) – sisi anti ajaib dengan $a = \frac{3n+1}{2} + mn + 2$ dan beda $d = 2$.

Bukti. Pertama, perlu dilakukan konstruksi fungsi pelabelan titik dan sisi. Misalkan $g: V(C_n \odot P_m) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n(1+m)\}$ dan $h: E(C_n \odot P_m) \rightarrow \{n(1+m)+1, \dots, 2mn\}$ dengan $n \geq 3$ ganjil, $n \in N$ dan $m \leq 3$, $m \in N$. Didefinisikan label pada titik dan sisi graf $C_n \odot P_m$ sebagai berikut:

1. Label titik

$$g(v_i) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1+i}{2}, \text{ } i \text{ ganjil} \\ \frac{(n+1)+i}{2}, \text{ } i \text{ genap} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$g(v_{i,j}) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{(2j+1)n+i}{2}, \text{ } i \text{ ganjil} \\ \frac{2jn+i}{2}, \text{ } i \text{ genap} \end{array} \right. \quad (2)$$

$$g(v_{i,m}) = (m+1)n + 1 - i \quad (3)$$

2. Label Sisi:

$$h(v_i v_{i+1}) = \{(m+1)n+1+i, \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad (m+1)n+1, \quad i = n\} \quad (4)$$

$$h(v_i v_{i,j}) = (m+(1+j))n+i \quad (5)$$

$$h(v_i v_{i,m}) = \left\{ \frac{(4m+3)n+2-i}{2}, \quad i \text{ ganjil} \quad \frac{(4m+4)n+2-i}{2}, \quad i \text{ genap} \right\} \quad (6)$$

$$h(v_{i,j} v_{i,m}) = \left\{ \frac{(4m+(2(2+j))n+1-i)}{2}, \quad i \text{ ganjil} \quad \frac{(4m+(2(2+j)-1)n+1-i)}{2}, \quad i \text{ genap} \right\} \quad (7)$$

Selanjutnya perhitungan bobot pada setiap sisi pada graf $C_n \odot P_m$ terhadap pelabelan g dan h dibagi menjadi 3 langkah, yaitu bobot pada lingkaran C_n , bobot yang menghubungkan titik pada graf lingkaran C_n dengan titik pada graf lintasan P_m , dan bobot pada graf lintasan P_m .

1. Bobot pada graf C_n

Untuk $1 \leq i \leq n-1, i$ ganjil

$$W_h(v_i v_{i+1}) = g(v_i) + h(v_i v_{i+1}) + g(v_{i+1}) = \left(\frac{1+i}{2}\right) + ((m+1)n+1+i) + \left(\frac{n+(1+i)+1}{2}\right) = \frac{3n+1}{2} + mn + 2i + 2 \quad (8)$$

Untuk $1 \leq i \leq n-1, i$ genap

$$W_h(v_i v_{i+1}) = g(v_i) + h(v_i v_{i+1}) + g(v_{i+1}) = \left(\frac{n+1+i}{2}\right) + ((m+1)n+1+i) + \left(\frac{i+1}{2}\right) = \frac{3n+1}{2} + mn + 2i + 2 \quad (9)$$

Untuk $i = n$

$$W_h(v_n v_1) = g(v_n) + h(v_n v_1) + g(v_1) = \left(\frac{n+1}{2}\right) + ((m+1)n+1) + \left(\frac{1+1}{2}\right) = \frac{3n+1}{2} + mn + 2 \quad (10)$$

2. Bobot yang menghubungkan titik pada graf C_n dengan titik pada graf P_m .

a. $h(v_i v_{i,j})$ dengan $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq m-1$

Untuk i ganjil

$$W_h(v_i v_{i,j}) = g(v_i) + h(v_i v_{i,j}) + g(v_{i,j}) = \left(\frac{1+i}{2}\right) + ((m+(1+j))n+i) + \left(\frac{(2j+1)n+i}{2}\right) = \frac{3n+1}{2} + mn + 2jn + 2i \quad (11)$$

Untuk i genap

$$W_h(v_i v_{i,j}) = g(v_i) + h(v_i v_{i,j}) + g(v_{i,j}) = \left(\frac{n+1+i}{2}\right) + ((m+(1+j))n+i) + \left(\frac{2jn+i}{2}\right) = \frac{3n+1}{2} + mn + 2jn + 2i \quad (12)$$

b. $h(v_i v_{i,m})$

Untuk i ganjil

$$W_h(v_i v_{i,m}) = g(v_i) + h(v_i v_{i,m}) + g(v_{i,m}) = \left(\frac{1+i}{2}\right) + \left(\frac{(4m+3)n+2-i}{2}\right) + ((m+1)n+1-i) = \frac{3n+1}{2} + mn + (2m+1)n - i + 2 \quad (13)$$

Untuk i genap

$$W_h(v_i v_{i,m}) = g(v_i) + h(v_i v_{i,m}) + g(v_{i,m}) = \left(\frac{n+1+i}{2}\right) + \left(\frac{(4m+4)n+2-i}{2}\right) + ((m+1)n+1-i) = \frac{3n+1}{2} + mn + (2m+2)n - i + 2 \quad (14)$$

3. Bobot pada graf P_m

a. $h(v_{i,j} v_{i,m})$ dengan $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq m-1$

Untuk i ganjil

$$W_h(v_{i,j} v_{i,m}) = g(v_{i,j}) + h(v_{i,j} v_{i,m}) + g(v_{i,m}) = \left(\frac{(2j+1)n+i}{2}\right) +$$

$$\left(\frac{(4m+(2(2+j))n+1-i)}{2}\right) + ((m+1)n+1-i) = \frac{3n+1}{2} + mn + (2m+2j+2)n-i+1 \quad (15)$$

Untuk i genap

$$W_h(v_{i,j}v_m) = g(v_{i,j}) + h(v_{i,j}v_m) + g(v_{i,m}) = \left(\frac{2mn+i}{2}\right) + \left(\frac{(4m+(2(2+j)-1)n+1-i)}{2}\right) + ((m+1)n+1-i) = \frac{3n+1}{2} + mn + (2m+2j+1)n-i+1 \quad (16)$$

Dari Persamaan (8) sampai (16), diperoleh himpunan bobot W pada graf hasil operasi $C_n \odot P_m$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W &= \{W_h(v_i v_{i+1}) | v_i v_{i+1} \in E\} \cup \{W_h(v_i v_{i,j}) | v_i v_{i,j} \in E\} \cup \{W_h(v_i v_{i,m}) | v_i v_{i,m} \in E\} \cup \\ &\{W_h(v_{i,j} v_m) | v_{i,j} v_m \in E\} = \left\{\frac{3n+1}{2} + mn + 2, \frac{3n+1}{2} + mn + 4, \dots, \frac{3n+1}{2} + mn + 2n\right\} \cup \left\{\frac{3n+1}{2} + mn + 2jn + 2, \dots, \frac{3n+1}{2} + mn + 2jn + 2n\right\} \cup \\ &\left\{\frac{3n+1}{2} + mn + 2mn + 2, \dots, \frac{3n+1}{2} + mn + 2mn + n + 2\right\} \cup \left\{\frac{3n+1}{2} + mn + (2mn + 2jn - 1) + 2, \dots, \frac{3n+1}{2} + mn + (2mn + 2jn + n - 1) + 2\right\} \\ &= \left\{\frac{3n+1}{2} + mn + 2, \frac{3n+1}{2} + mn + 4, \dots, \frac{3n+1}{2} + mn + 2jn + 2n, \dots, \frac{3n+1}{2} + mn + 2mn + 2, \dots, \frac{3n+1}{2} + mn + (2mn + 2jn + n - 1) + 2\right\} \quad (17) \end{aligned}$$

Dari Persamaan (17) dilihat bahwa himpunan bobot W membentuk barisan aritmatika dengan suku pertama $a = \frac{3n+1}{2} + mn + 2$ dan beda $d = 2$. Jadi diperoleh pelabelan total super $\left(\frac{3n+1}{2} + mn + 2, 2\right)$ -sisi anti ajaib pada graf $C_n \odot P_m$ untuk setiap $n \geq 3$ ganjil, $n \in N$ dan $m \leq 3, m \in N$. ■

Selain $d = 2$, dalam penelitian ini diberikan hasil yang menyatakan bahwa $C_n \odot P_m$ juga memuat pelabelan total super (a, d) -sisi anti ajaib dengan $d = 0$ yang dituangkan dalam teorema 2. Karena pelabelan ini memuat $d = 0$, maka disebut pelabelan total super (a, d) -sisi ajaib. Pada pelabelan kedua ini, konstruksi bukti teorema mirip dengan Teorema 1, akan tetapi ada perbedaan pada pelabelan sisi.

Teorema 2. Graf $C_n \odot P_m$ dengan $n \geq 3$ ganjil, $n \in N, m \leq 3, m \in N$, memuat pelabelan total super (a, d) -sisi ajaib dengan konstanta ajaib $k = \frac{3(2mn+n+1)}{2}$.

Bukti. Pertama, perlu dilakukan konstruksi fungsi pelabelan titik dan sisi. Misalkan fungsi pelabelan titik sama seperti pelabelan titik pada Teorema 1 dan $l: E(C_n \odot P_m) \rightarrow \{n(1+m)+1, \dots, 2mn\}$ dengan $n \geq 3$ ganjil, $n \in N$ dan $m \leq 3, m \in N$. Didefinisikan sebagai fungsi pelabelan sisi pada graf $C_n \odot P_m$ sebagai berikut:

1. Label Sisi:

$$l(v_i v_{i+1}) = \{(3m+1)n - i, \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad (3m+1)n, \quad i = n\} \quad (18)$$

$$l(v_i v_{i,j}) = (3m + (1-j))n + 1 - i \quad (19)$$

$$l(v_i v_{i,m}) = \left\{\frac{(4m+1)n+i}{2}, \quad i \text{ ganjil} \quad \frac{4mn+i}{2}, \quad i \text{ genap}\right\} \quad (20)$$

$$l(v_{i,j} v_{i,m}) = \left\{\frac{(4m-2j)n+1+i}{2}, \quad i \text{ ganjil} \quad \frac{(4m-2j+1)n+1+i}{2}, \quad i \text{ genap}\right\} \quad (21)$$

Selanjutnya perhitungan bobot pada setiap sisi pada graf $C_n \odot P_m$ terhadap pelabelan g dan l dibagi menjadi 3 langkah, yaitu bobot pada lingkaran C_n , bobot yang menghubungkan titik pada graf lingkaran C_n dengan titik pada graf lintasan P_m , dan bobot pada graf lintasan P_m .

1. Bobot pada graf C_n

Untuk $1 \leq i \leq n-1, i$ ganjil

$$W_l(v_i v_{i+1}) = g(v_i) + l(v_i v_{i+1}) + g(v_{i+1}) = \left(\frac{1+i}{2}\right) + (3m+1)n - i + \left(\frac{n+(1+i)+1}{2}\right)$$

$$= \frac{3(2mn+n+1)}{2} \quad (22)$$

Untuk $1 \leq i \leq n-1, i$ genap

$$W_l(v_i v_{i+1}) = g(v_i) + l(v_i v_{i+1}) + g(v_{i+1}) = \left(\frac{n+1+i}{2}\right) + (3m+1)n - i + \left(\frac{(i+1)+1}{2}\right) \\ = \frac{3(2mn+n+1)}{2} \quad (23)$$

Untuk $i = n$

$$W_l(v_n v_1) = g(v_n) + l(v_n v_1) + g(v_1) = \left(\frac{n+1}{2}\right) + (3m+1)n + \left(\frac{1+1}{2}\right) = \\ \frac{3(2mn+n+1)}{2} \quad (24)$$

2. Bobot yang menghubungkan titik pada graf C_n dengan titik pada graf P_m .

a. $l(v_i v_{i,j})$ dengan $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq m-1$

Untuk i ganjil

$$W_l(v_i v_{i,j}) = g(v_i) + l(v_i v_{i,j}) + g(v_{i,j}) = \left(\frac{1+i}{2}\right) + (3m+(1-j))n + 1 - i + \\ \left(\frac{(2j+1)n+i}{2}\right) = \frac{3(2mn+n+1)}{2} \quad (25)$$

Untuk i genap

$$W_l(v_i v_{i,j}) = g(v_i) + l(v_i v_{i,j}) + g(v_{i,j}) = \left(\frac{n+1+i}{2}\right) + (3m+(1-j))n + 1 - i + \\ \left(\frac{2jn+i}{2}\right) = \frac{3(2mn+n+1)}{2} \quad (26)$$

b. $l(v_i v_{i,m})$

Untuk i ganjil

$$W_h(v_i v_{i,m}) = g(v_i) + l(v_i v_{i,m}) + g(v_{i,m}) = \left(\frac{1+i}{2}\right) + \frac{(4m+1)n+i}{2} + ((m+1)n + \\ 1 - i) = \frac{3(2mn+n+1)}{2} \quad (27)$$

Untuk i genap

$$W_l(v_i v_{i,m}) = g(v_i) + l(v_i v_{i,m}) + g(v_{i,m}) = \left(\frac{n+1+i}{2}\right) + \frac{4mn+i}{2} + ((m+1)n + 1 - \\ i) = \frac{3(2mn+n+1)}{2} \quad (28)$$

3. Bobot pada graf P_m

a. $l(v_{i,j} v_{i,m})$ dengan $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq m-1$

Untuk i ganjil

$$W_l(v_{i,j} v_m) = g(v_{i,j}) + l(v_{i,j} v_m) + g(v_{i,m}) = \left(\frac{(2j+1)n+i}{2}\right) + \left(\frac{(4m-2j)n+1+i}{2}\right) + \\ ((m+1)n + 1 - i) = \frac{3(2mn+n+1)}{2} \quad (29)$$

Untuk i genap

$$W_l(v_{i,j} v_m) = g(v_{i,j}) + l(v_{i,j} v_m) + g(v_{i,m}) = \left(\frac{2jn+i}{2}\right) + \left(\frac{(4m-2j+1)n+1+i}{2}\right) + \\ ((m+1)n + 1 - i) = \frac{3(2mn+n+1)}{2} \quad (30)$$

Dari persamaan (22) sampai (30), diperoleh himpunan bobot W pada graf hasil operasi $C_n \odot P_m$ adalah sebagai berikut:

$$W = (\Sigma W_l(v_i v_{i+1}) | v_i v_{i+1} \in E) \cup (\Sigma W_l(v_i v_{i,j}) | v_i v_{i,j} \in E) \cup (\Sigma W_h(v_i v_{i,m}) | v_i v_{i,m} \in E) \cup \\ (\Sigma W_l(v_{i,j} v_m) | v_{i,j} v_m \in E) = \frac{3(2mn+n+1)}{2}$$

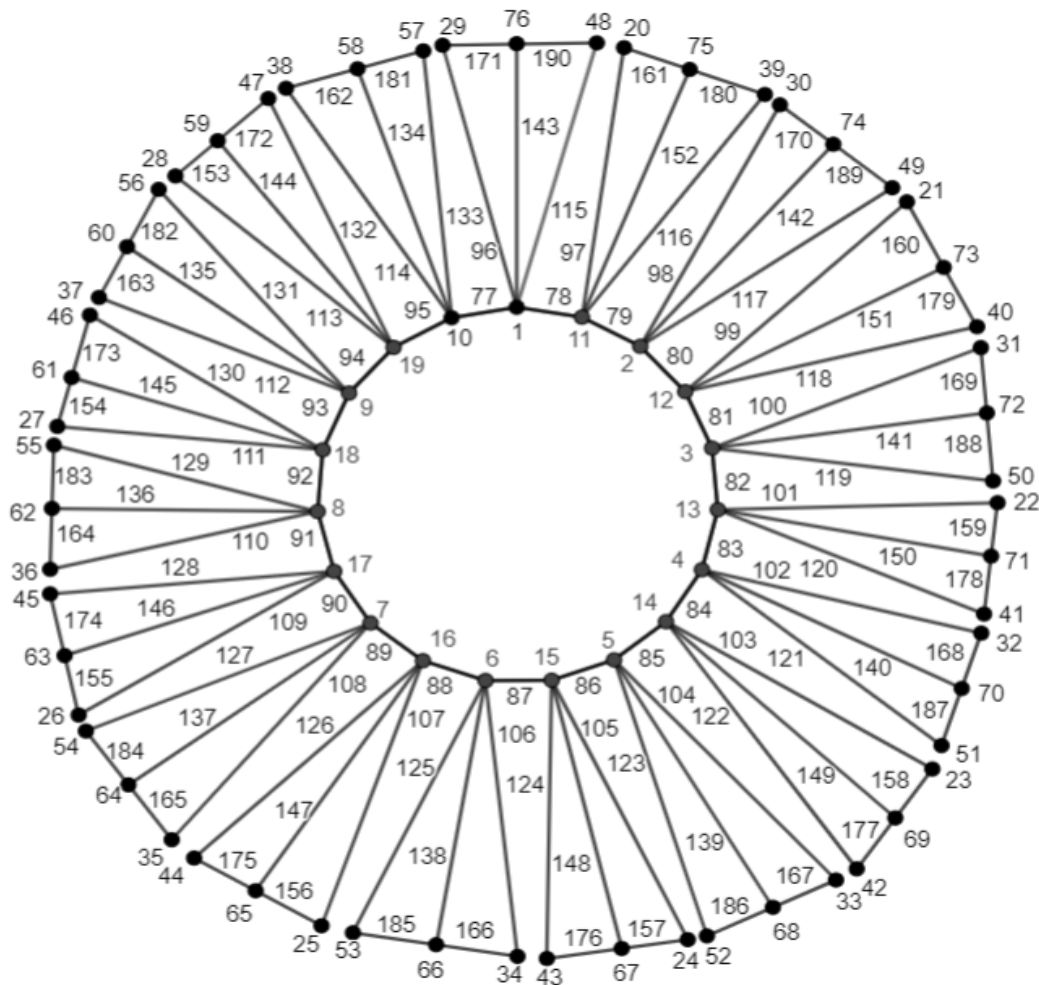
(31)

Dari persamaan (31) dilihat bahwa himpunan bobot W membentuk suatu konstanta ajaib W sebesar $\frac{3(2mn+n+1)}{2}$ pada graf $C_n \odot P_m$ untuk setiap $n \geq 3$ ganjil, $n \in N$ dan $m \leq 3, m \in N$.



1.5 Contoh Pelabelan Total Sisi Ajaib Super dan Pelabelan Total Sisi Anti Ajaib Super pada Graf $C_n \odot P_m$ dengan $n \geq 3$ ganjil, $n \in N$ dan $m \leq 3, m \in N$

Contoh 1. Pelabelan Total Sisi Anti Ajaib Super pada Graf Hasil Operasi $C_n \odot P_m$



Gambar 1 Graf $C_{19} \odot P_3$

Sumber: Hasil analisis penulis

Gambar 1 pada Contoh 1 mengilustrasikan tentang Teorema 1. Diberikan graf $C_n \odot P_m$ dengan $n = 19$ dan $m = 3$, kemudian didefinisikan label titik dan sisi untuk graf dengan pola pelabelan yang telah didapatkan sebagai berikut

Label titik:

$$g(v_i) = \{1, 11, 2, 12, 3, 13, 4, 14, 5, 15, 6, 16, 7, 17, 8, 18, 9, 19, 10\}$$

$$g(v_{i,1}) = \{29, 20, 30, 21, 31, 22, 32, 23, 33, 24, 34, 25, 35, 26, 36, 27, 37, 28, 38\}$$

$$g(v_{i,2}) = \{48, 39, 49, 40, 50, 41, 51, 42, 52, 43, 53, 44, 54, 45, 55, 46, 56, 47, 57\}$$

$$g(v_{i,3}) = \{76, 75, 74, 73, 72, 71, 70, 69, 68, 67, 66, 65, 64, 63, 62, 61, 60, 59, 58\}$$

Label sisi:

$$h(v_i v_{i+1}) = \{78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 77\}$$

$$h(v_i v_{i,1}) = \{96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114\}$$

$$h(v_i v_{i,2}) = \{115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133\}$$

$$h(v_i v_{i,3}) = \{143, 152, 142, 151, 141, 150, 140, 149, 139, 148, 138, 147, 137, 146, 136, 145, 135, 144, 134\}$$

$$h(v_{i,1} v_{i,3}) = \{171, 161, 170, 160, 169, 159, 168, 158, 167, 157, 166, 156, 165, 155, 164, 154, 163, 153, 162\}$$

$$h(v_{i,2} v_{i,3}) = \{190, 180, 189, 179, 188, 178, 187, 177, 186, 176, 185, 175, 184, 174, 183, 173, 182, 172, 181\}$$

Kemudian didapatkan nilai a dengan menggunakan persamaan pada Teorema 4.1.1 yang telah didapatkan $a = mn + \frac{3n+1}{2} + 2$ sebagai berikut

$$a = mn + \frac{3n+1}{2} + 2 \quad a = 3 \cdot 19 + \frac{3 \cdot 19 + 1}{2} + 2 \quad a = 88$$

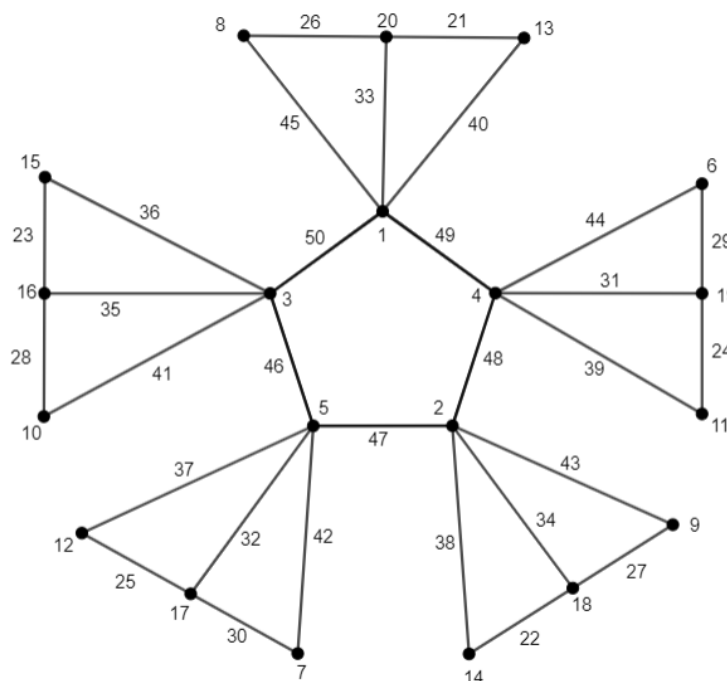
Dari hasil yang telah didapatkan, diperoleh himpunan bobot W pada graf hasil operasi $C_{19} \odot P_3$ adalah sebagai berikut:

$$W = \{88, 90, 92, 94, 96, 98, 100, 102, 104, 106, 108, 110, 112, 114, 116, 118, 120, 122, 124, 126, 128, 130, 132, 134, 136, 138, 140, 142, 144, 146, 148, 150, 152, 154, 156, 158, 160, 162, 164, 166, 168, 170, 172, 174, 176, 178, 180, 182, 184, 186, 188, 190, 192, 194, 196, 198, 200, 202, 204, 206, 208, 210, 212, 214, 216, 218, 220, 222, 224, 226, 228, 230, 232, 234, 236, 238, 240, 242, 244, 246, 248, 250, 252, 254, 256, 258, 260, 262, 264, 266, 268, 270, 272, 274, 276, 278, 280, 282, 284, 286, 288, 290, 292, 294, 296, 298, 300, 302, 304, 306, 308, 310, 312, 314\}$$

Berdasarkan himpunan bobot pada W maka dapat dipastikan nilai $d = 2$.

Oleh karena setiap titik menerima label terkecil dan himpunan bobot W membentuk suatu barisan aritmatika dengan beda $d = 2$, maka pelabelan tersebut dinamakan pelabelan total super $(88, 2)$ –sisi anti ajaib.

Contoh 2 Pelabelan Total Sisi Ajaib Super pada Graf Hasil Operasi $C_n \odot P_m$



Gambar 2 Graf $C_5 \odot P_3$
 Sumber: Hasil analisis penulis

-
- Damayanti, Reni Tri. (2011), *Automorfisme Graf Bintang dan Graf Lintasan*, Malang: Universitas Brawijaya.
- Fatkhiyah, Lutfiana. (2010). *Bilangan Clique dan Faktorisasi pada Perkalian Graf Komplit*. ETHESES UIN Malang. 10.
- Fauziyah, Izza. (2010), *Pelabelan Total Sisi Anti Ajaib (a, d) pada Graf C_n Dengan $d = 1, 2$ dan 3* . Universitas Islam Negeri Malang, Malang.
- Galian, Joseph. (2009). "A Dynamic Survey of Graph Labeling", *the electronic journal of combinatoric* 17. No.DS6.
- Masyitoh, Soffi N. (2019). *Dekomposisi $(a, d) - P_4 -$ Antiajaib Pada Graf Generalized Peterson $GP(n, 3)$* . UIN Syarif Hidayatullah Jakarta, Jakarta.
- Miftahurrahmah. (2016). *Aplikasi Teori Graf dalam Pengaturan Lampu Lalu Lintas*. UIN Alauddin Makassar, Makassar.
- Munir, R. (2014). *Matematika Diskrit Edisi Ketiga*, Bandung: Informatika Bandung.
- Mursyidah, H. dan Rahmawati, S. (2017). *Dominating Number Dari Graf Hasil Operasi Korona Graf Lintasan Dengan Graf Sikel $P_n \odot C_m$ dan Sebaliknya $C_m \odot P_n$* . Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya, Surabaya.
- Musthofa, Puri Rizqi dan Yemi Kuswardi. (2018), *Dekomposisi Graf Matahari $C_n \odot (K_1)$* . UNS, Semarang.
- Rahman, A., Narwen., dan Ahamd Iqbal B. (2012). "Pelabelan Total $(a, d) -$ Sisi Antiajaib pada Graf Peterson $P(n, 2)$, Untuk n Ganjil, $n \geq 3$ ". *Jurnal Matematika UNAND*, 1(1), 1-4.
- Rosen, Kenneth H. (2012). *Discrete Mathematics and Its Application*. New York: McGraw-Hill.
- Rosyid, Abdul. (2010). *Pelabelan Total Titik Ajaib Pada Graf Peterson yang Diperumum*. UNDIP, Semarang.
- Saputra, Angga. (2016). *Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic Pada Korona $C_n \odot P_2$* . Universitas Jember, Jember.
- Suryanto. (1986). *Materi Pokok Pengantar Teori Graph*. Jakarta: Karunika Universitas Terbuka.
- Wilson. Robin J dan Walkins, John J. (1990), *Graphs an Introductory Approach: A First Course in Discrete Matematic*, New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Yunika, dkk. (2015), *Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic pada Graf Lampion*. Universitas Jember.