EQUIVA
Journal of Mathematics & Information Technology
Vol. 03, No. 02, Tahun
ISSN 3046-6792

Penyelesaian Masalah Transportasi Menggunakan *Transportation Optimality Complementary Method* (TCOM) dengan *Zero Point Minimum Method* (ZPMM) dan Uji Optimalitas MODI

Lia Hikmawati [1, a)] dan Pardi Affandi [2, b)]

[1,2] Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Lambung Mangkurat.

[a)] 2311011220013@mhs.ulm.ac.id
[b)] p_affandi@ulm.ac.id

Abstrak. Masalah transportasi merupakan bentuk khusus dari program linear yang bertujuan untuk meminimalkan total biaya distribusi dari sejumlah sumber ke beberapa tujuan dengan mempertimbangkan batasan pasokan dan permintaan. Penelitian ini menerapkan kombinasi *Transportation Optimality Complementary Method* (TOCM) dan *Zero Point Minimum Method* (ZPMM) untuk memperoleh solusi awal yang efisien, kemudian menggunakan *Modified Distribution Method* (MODI) untuk memperoleh solusi optimal. Pendekatan ini diuji pada tiga kategori kasus, yaitu kondisi transportasi seimbang, kelebihan pasokan (*supply* > *demand*), dan kelebihan permintaan (*demand* > *supply*). Hasil penelitian menunjukkan bahwa metode TOCM-ZPMM mampu menghasilkan solusi awal yang sangat mendekati hasil optimal, sehingga tahap uji optimalitas dengan MODI tidak memerlukan banyak iterasi perbaikan. Oleh karena itu, kombinasi metode ini dapat meningkatkan efisiensi waktu perhitungan dan memberikan hasil yang akurat, menjadikannya alternatif efektif untuk penyelesaian masalah transportasi dalam bidang logistik dan distribusi.

Kata kunci: Masalah transportasi, *Transportation Optimality Complementary Method*, *Zero Point Minimum Method*, *Modified Distribution.*

1. PENDAHULUAN

Masalah transportasi merupakan salah satu bentuk khusus dari program linier dengan tujuan mentransportasikan produk dari beberapa sumber menuju sejumlah tujuan dengan biaya minimum [1]. Metode Transportasi terdiri atas 2 tahap, yaitu mencari solusi awal kemudian mencari solusi optimal. Sejak pertama kali diperkenalkan oleh Hitchcock pada tahun 1941, kemudian dikembangkan lebih lanjut oleh Charnes (1953) dan Dantzig (1963), model transportasi telah banyak dipelajari untuk menghasilkan berbagai metode penyelesaian yang efisien [2]. Model ini menjadi dasar penting dalam riset operasi untuk menangani persoalan logistik, distribusi, dan rantai pasok.

Dalam praktiknya, penyelesaian masalah transportasi umumnya dilakukan dalam dua tahap, yaitu memperoleh *Initial Basic Feasible Solution* (IBFS), kemudian melakukan uji optimalitas hingga tercapai solusi akhir yang paling efisien [3]. Beberapa metode populer untuk memperoleh solusi awal di antaranya adalah *North-West Corner Method* (NWC), *Least Cost Method*, dan *Vogel's Approximation Method* (VAM). Namun, hasil dari metode-metode tersebut tidak selalu mendekati optimum, terutama untuk kasus yang memiliki distribusi biaya tidak teratur atau data yang kompleks. Oleh karena itu, setelah menentukan solusi awal, akan dicari solusi optimal dengan metode optimal seperti *Modified Distribution* **(**MODI**)** dan *stepping stone*.

Untuk meningkatkan efisiensi dan akurasi dalam penentuan solusi awal, sejumlah metode baru telah dikembangkan. Salah satu pendekatan terkini adalah *Transportation Optimality Complementary Method* (TOCM), yang pertama kali diperkenalkan oleh Kirca dan Satir [4]. Metode ini didasarkan pada konsep *Total Opportunity Cost Matrix (TOCM)*, yaitu hasil penjumlahan antara *Row Opportunity Cost Matrix (ROCM)* dan *Column Opportunity Cost Matrix (COCM)* [3]. TOCM mempertimbangkan seluruh peluang biaya dalam satu matriks terpadu, sehingga memberikan gambaran menyeluruh terhadap efisiensi setiap sel dalam tabel transportasi.

Penelitian terbaru oleh Bilkour mengusulkan pengembangan lebih lanjut dari TOCM dengan menambahkan *Zero Point Minimum Method* (ZPMM) sebagai prosedur penyempurnaan dalam menentukan sel alokasi awal. Metode ini berfungsi untuk menemukan posisi *minimum cost zero point* pada matriks biaya transportasi. Melalui identifikasi titik nol tersebut, metode ini membantu menentukan alokasi awal yang efisien serta mempercepat proses konvergensi menuju solusi optimal. Pendekatan gabungan TOCM-ZPMM juga terbukti mampu menghasilkan *Initial Basic Feasible Solution* (IBFS) yang mendekati hasil optimal tanpa memerlukan banyak iterasi, sehingga mengatasi keterbatasan metode heuristik klasik dalam tahap alokasi awal [3].

Setelah solusi awal diperoleh, tahap berikutnya adalah melakukan uji optimalitas untuk memastikan solusi tersebut benar-benar mencapai biaya minimum. Uji ini dilakukan menggunakan *Modified Distribution* (MODI), yang menghitung *opportunity cost* untuk setiap sel kosong dan menentukan apakah masih ada potensi perbaikan terhadap total biaya. Dengan kombinasi TOCM-ZPMM dan MODI, proses penyelesaian masalah transportasi menjadi lebih efisien baik dari sisi waktu maupun hasil, karena solusi awal yang dihasilkan sudah mendekati kondisi optimal.

Berangkat dari kondisi tersebut, penelitian ini bertujuan untuk menjelaskan dan mengimplementasikan algoritma TOCM dengan ZPMM dalam penyelesaian masalah transportasi. Penelitian ini juga bertujuan untuk menguji performa metode tersebut terhadap data numerik. Hasil penelitian diharapkan dapat menunjukkan bahwa kombinasi TOCM-ZPMM mampu menghasilkan solusi awal yang lebih baik dan efisien dalam mendekati solusi optimal, sekaligus memberikan kontribusi terhadap peningkatan efektivitas metode penyelesaian masalah transportasi modern.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Program Linear

Program linear (*Linear Programming*) merupakan salah satu teknik dasar dalam riset operasi yang berfokus pada pencarian solusi optimal dari suatu permasalahan dengan struktur matematis linear. Menurut Winston, suatu model program linier tersusun atas tiga komponen utama, yaitu variabel keputusan, fungsi tujuan, dan kendala. Variabel keputusan merepresentasikan besaran yang akan ditentukan nilainya, fungsi tujuan menggambarkan ukuran kinerja yang ingin dimaksimalkan atau diminimalkan (misalnya keuntungan, biaya, atau waktu), sedangkan kendala mencerminkan keterbatasan sumber daya yang harus dipatuhi [5].

Secara umum, bentuk matematis program linear dapat ditulis sebagai berikut:

$$\text{Optimalkan } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

dengan kendala:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_j \geq 0, j = 1,2,\ldots,n \end{gathered}$$

Fungsi tujuan z dapat berupa maksimisasi (memperoleh keuntungan maksimum) atau minimisasi (mengurangi biaya). Himpunan semua solusi yang memenuhi kendala disebut daerah layak (*feasible region*), sedangkan solusi optimal adalah titik dalam daerah layak yang memberikan nilai terbaik bagi fungsi tujuan [5].

Dalam praktiknya, program linear banyak digunakan pada berbagai bidang, seperti perencanaan produksi, alokasi sumber daya, penjadwalan tenaga kerja, hingga logistik. Metode ini memberikan kerangka matematis yang sistematis untuk mendukung pengambilan keputusan, sekaligus mampu menangani permasalahan berskala besar dengan bantuan perangkat lunak komputer.

2.2 Model Transportasi

Model transportasi merupakan bentuk khusus dari program linier yang berfokus pada masalah distribusi dari sejumlah sumber (*supply*) ke sejumlah tujuan (*demand*). Dalam konteks program linier, fungsi tujuan pada model transportasi umumnya berupa minimisasi total biaya distribusi, dengan tetap memperhatikan kendala berupa jumlah pasokan di setiap sumber dan jumlah permintaan di setiap tujuan. Dengan kata lain, model transportasi dapat dipandang sebagai aplikasi nyata dari program linier dalam bidang logistik dan rantai pasok [5].

Secara matematis, model transportasi diformulasikan sebagai berikut:

$$\text{Minimalkan } Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

dengan kendala:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i (i = 1,2,\ldots,m),$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j (j = 1,2,\ldots,n),$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

keterangan:

c_{ij}= biaya transportasi per unit dari sumber i ke tujuan j,

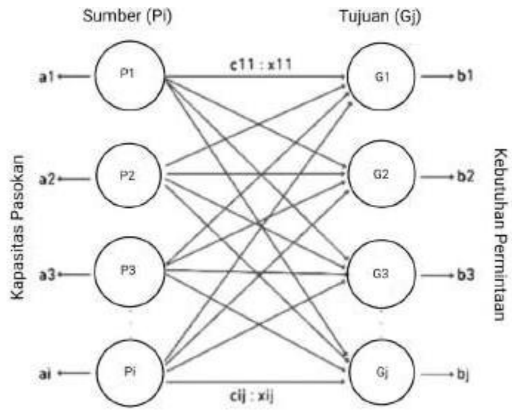
x_{ij}= jumlah barang yang dialokasikan dari sumber i ke tujuan j,

a_i= kapasitas pasokan pada sumber i,

b_j= kebutuhan permintaan pada tujuan j.

Masalah transportasi dikatakan seimbang (*balanced*) apabila total pasokan sama dengan total permintaan ($\sum a_i = \sum b_j$). Sebaliknya, jika tidak seimbang maka perlu ditambahkan baris *dummy* (jika permintaan lebih besar dari pasokan) atau kolom *dummy* (jika pasokan lebih besar dari permintaan). Biaya transportasi pada *dummy* biasanya diisi nol karena tidak ada pengiriman nyata.

Struktur hubungan antara titik asal dan titik tujuan pada masalah transportasi dapat digambarkan dalam bentuk jaringan. Jaringan ini menunjukkan aliran distribusi barang dari setiap sumber menuju ke berbagai tujuan dengan biaya tertentu. Setiap garis penghubung merepresentasikan kemungkinan jalur pengiriman yang menjadi bagian dari perhitungan total biaya transportasi. Gambar berikut memperlihatkan representasi umum model masalah transportasi.



GAMBAR 1. Model jaringan aliran dari sumber ke tujuan pada masalah transportasi

Model jaringan tersebut menjadi dasar formulasi matematis dari masalah transportasi, di mana tujuan utamanya adalah menentukan jumlah alokasi x_{ij} dari sumber ke tujuan yang meminimalkan total biaya distribusi.

Representasi matematis model transportasi biasanya dituangkan dalam bentuk tabel transportasi. Tabel ini membantu menggambarkan keterkaitan antara sumber dengan kapasitas pasokannya, tujuan dengan kebutuhan permintaannya, serta biaya transportasi pada setiap rute distribusi.

Ke Dari	G_1	G_2	$\cdots$	G_j	*Supply*
P_1	X_{11} C_{11}	X_{12} C_{12}	$\cdots$	X_{1j} C_{1j}	a_1
P_2	X_{21} C_{21}	X_{22} C_{22}	$\cdots$	X_{2j} C_{2j}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
P_i	X_{i1} C_{i1}	X_{i2} C_{i2}	$\cdots$	X_{ij} C_{ij}	a_i
Demand	b_1	b_2	$\cdots$	b_j	$\sum a_i / \sum b_j$

TABEL 1. Model umum masalah transportasi

2.3 *Transportation Optimality Complementary Method* (TCOM)

Metode TOCM pertama kali diperkenalkan oleh Kirca dan Satir [4] sebagai pengembangan dari metode heuristik untuk menemukan solusi awal yang lebih efisien dibandingkan pendekatan klasik. TOCM menggunakan konsep *Total Opportunity Cost* (TOC), yang dihitung dengan menjumlahkan dua komponen utama, yaitu *Row Opportunity Cost (ROC)* dan *Column Opportunity Cost (COC)*. Keunggulan TOCM adalah kemampuannya menghasilkan solusi awal yang mendekati optimum karena mempertimbangkan keseluruhan peluang biaya baik dari sisi baris maupun kolom secara simultan.

2.4 *Zero Point Minimum Method* (ZPMM)

Perkembangan TOCM kemudian disempurnakan dengan menambahkan prosedur *Zero Point Minimum Method* (ZPMM) [3]. ZPMM digunakan untuk memilih sel dengan nilai peluang biaya minimum nol (*zero point*) pada matriks TOCM, yang berfungsi mengidentifikasi titik paling efisien untuk memulai proses alokasi awal. Pendekatan TOCM dengan ZPMM memiliki keunggulan yaitu menghasilkan *Initial Basic Feasible Solution* (IBFS) yang lebih efisien dibandingkan metode TOCM standar dan mengurangi potensi bias dalam pemilihan sel awal.

Dalam sembilan studi kasus yang diuji oleh Bilkour [3], TOCM-ZPMM terbukti menghasilkan total biaya transportasi yang identik dengan hasil optimal. Hal ini menunjukkan bahwa metode tersebut mampu memberikan keseimbangan antara akurasi hasil dan efisiensi perhitungan dalam penyelesaian masalah transportasi.

2.5 *Modified Distribution Method* (MODI)

Modified Distribution Method (MODI) merupakan salah satu teknik optimasi yang digunakan untuk memperoleh solusi optimal dari masalah transportasi setelah diperoleh *Initial Basic Feasible Solution* (IBFS). Metode ini bekerja dengan cara mengevaluasi setiap rute transportasi berdasarkan *opportunity cost* atau potensi penghematan biaya yang dapat dicapai melalui perubahan alokasi tertentu. Dengan melakukan proses perhitungan iteratif terhadap sel-sel tak teralokasi, metode MODI secara bertahap memperbaiki solusi awal hingga mencapai total biaya transportasi minimum [3].

Meskipun memerlukan waktu komputasi yang relatif lebih tinggi dibandingkan metode heuristik awal, MODI memberikan jaminan konvergensi menuju solusi optimal melalui proses iteratif yang sistematis. Dengan demikian, metode ini sering diposisikan sebagai tahap penyempurnaan akhir dalam rangkaian penyelesaian masalah transportasi yang menekankan keseimbangan antara efisiensi dan keakuratan hasil [3].

3. METODE

3.1 Prosedur Penelitian

Tahapan penelitian dibagi menjadi dua bagian utama, yaitu penentuan solusi awal menggunakan TOCM-ZPMM, dan pengujian optimalitas hasil menggunakan MODI. Langkah-langkah penelitian dilakukan untuk menyelesaikan masalah transportasi yaitu melalui tahapan berikut:

1. Mengidentifikasi masalah transportasi dengan menyusun model transportasi yang meliputi fungsi tujuan dan fungsi kendala
2. Menghitung *Row Opportunity Cost* (ROC) dan *Column Opportunity Cost* (COC).
   Pada tahap ini, biaya terkecil pada setiap baris dalam tabel transportasi dikurangkan dari seluruh elemen pada baris yang bersangkutan. Matriks hasil pengurangan tersebut disebut *Row Opportunity Cost* (ROC). Prosedur yang sama dilakukan untuk setiap kolom, dan matriks yang dihasilkan disebut *Column Opportunity Cost* (COC). Matriks ROC dan COC digunakan untuk menunjukkan peluang penghematan biaya pada setiap baris atau kolom dengan mempertimbangkan selisih antara biaya aktual dan biaya minimum pada baris atau kolom tersebut.
   Untuk setiap baris, dilakukan reduksi terhadap elemen terkecil:
   $$ROC_{ij} = c_{ij} - \min\ (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in})$$
   Untuk setiap kolom, dilakukan reduksi terhadap elemen terkecil:
   $$COC_{ij} = c_{ij} - \min\ (c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{mj})$$
3. Membentuk *Total Opportunity Cost Matrix* (TOCM)
   Total Opportunity Cost Matrix (TOCM) dihitung dengan menjumlahkan menjumlahkan nilai ROC dan TOC:
   $$TOCM_{ij} = ROC_{ij} + COC_{ij}$$
   Matriks TOCM menunjukkan peluang biaya gabungan dari setiap pasangan sumber dan tujuan.
4. Penerapan *Zero Point Minimum Method* (ZPMM)

EQUIVA
Journal of Mathematics & Information Technology
Vol. 03, No. 02, Tahun
ISSN 3046-6792

Langkah utama dalam metode ini berfokus pada penentuan titik nol (*zero point*) pada tabel TOCM, di mana titik tersebut menunjukkan sel dengan potensi biaya yang paling efisien. Proses pemilihan dan penentuan alokasi dalam ZPMM mengikuti aturan sebagai berikut:

a) Reduksi Baris
Setiap elemen pada baris dikurangi dengan nilai minimum pada baris tersebut untuk menghasilkan paling sedikit satu elemen bernilai nol di setiap baris.
Untuk setiap baris i, tentukan nilai minimum dari elemen-elemen pada baris tersebut, yaitu:

$$m_i = \min(C'_{ij})$$

Kemudian, kurangi setiap elemen pada baris i dengan nilai minimum tersebut:

$$C''_{ij} = C'_{ij} - m_i$$

b) Reduksi Kolom
Setelah reduksi baris, setiap elemen pada kolom dikurangi dengan nilai minimum pada kolom tersebut sehingga setiap kolom juga memiliki setidaknya satu elemen bernilai nol.
Menentukan nilai minimum untuk setiap kolom j:

$$n_j = \min(C'_{ij})$$

Lali kurangi setiap elemen dalam kolom j dengan nilai minimum kolom tersebut:

$$C''_{ij} = C'_{ij} - n_j$$

Hasil dari tahap a) dan b) akan menghasilkan tabel ZPPM.

c) Pemeriksaan dua kondisi pada tabel ZPMM
1) Permintaan setiap kolom ≤ total pasokan dari kolom yang biaya reduksinya nol.
2) Pasokan setiap baris ≤ total permintaan dari baris yang biaya reduksinya nol.

Jika kedua kondisi terpenuhi, maka solusi awal sudah memenuhi kondisi *feasible optimal*. Jika belum, dilakukan reduksi ulang untuk menambah elemen nol baru.

d) Pembentukan matriks reduksi baru
Jika kedua kondisi pada langkah c) telah terpenuhi, langkah d) tidak perlu dilakukan. Namun, apabila kondisi tersebut belum tercapai, maka ditentukan jumlah garis horizontal dan vertikal minimum yang dapat menutupi seluruh elemen nol pada tabel transportasi hasil reduksi.
1. Membuat garis dengan mempertimbangkan seluruh sel bernilai nol.
2. Jika terdapat sel yang tidak tertutupi garis, berarti masih ada potensi reduksi lebih lanjut.

Terlebih dahulu mengidentifikasi nilai terkecil dari elemen-elemen yang tidak tertutup oleh garis. Nilai tersebut kemudian digunakan sebagai dasar penyesuaian pada tabel, yaitu dengan menguranginya dari setiap elemen yang tidak tertutup garis. Sementara itu, untuk elemen yang berada pada titik perpotongan dua garis ditambahkan dengan nilai terkecil tersebut. Melalui proses ini, diperoleh matriks transportasi baru yang memenuhi dua kondisi pada langkah c), serta menghasilkan nol tambahan pada posisi strategis yang dapat membuka peluang alokasi baru.

5. Mengalokasikan *Supply-Demand*

a) Identifikasi titik nol
Sel-sel dengan nilai $TOCM_{ij} = 0$ dipertimbangkan sebagai kandidat alokasi.

b) Pemilihan sel terbaik
Apabila terdapat lebih dari satu titik nol, pertimbangan beralih pada nilai biaya c_{ij}, dan sel dengan biaya terkecil menjadi prioritas.

c) Penentuan besar alokasi
Jumlah barang yang dialokasikan pada sel terpilih ditentukan berdasarkan nilai minimum antara kapasitas sumber a_i dan kebutuhan tujuan b_j, yaitu $\min(a_i, b_j)$.

d) Pembaruan kondisi tabel
Setelah alokasi dilakukan, kapasitas dan permintaan diperbarui. Proses tersebut berlanjut hingga seluruh kebutuhan terpenuhi dan tidak ada alokasi yang tersisa.

6. Menghitung total biaya transportasi sebagai solusi awal
   Setelah seluruh alokasi diperoleh, maka total biaya transportasi:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

7. Menentukan solusi optimal dengan *Modified Distribution Method* (MODI)
   Setelah solusi awal diperoleh, langkah-langkah berikut dilakukan untuk mendapatkan solusi yang optimal:
   a) Menyusun tabel solusi awal yang layak sebagai dasar untuk proses evaluasi berikutnya.
   b) Menentukan nilai U_i dan V_j yang ditetapkan berdasarkan sel yang memiliki alokasi (variabel basis), Dengan mengambil sebuah baris untuk menetapkan satu nilai U (umumnya $U_1 = 0$). Untuk semua variabel basis, hubungan antara U_i dan V_j diberikan oleh persamaan:
   $$C_{ij} = U_i + V_j$$
   Dimulai dari $U_1 = 0$, sehingga selanjutnya nilai U_i dan V_j lainnya dapat dihitung secara bertahap berdasarkan hubungan tersebut disetiap sel basis.
   c) Menghitung biaya peluang atau penyesuaian biaya (Δ_{ij}) untuk setiap sel kosong (variabel non-basis). Nilai Δ_{ij} dihitung menggunakan persamaan:
   $$\Delta_{ij} = C_{ij} - \left(U_i + V_j\right)$$
   Nilai Δ_{ij} ini menunjukkan seberapa besar perubahan biaya total jika sejumlah kecil barang dialokasikan ke sel tersebut. Dengan kata lain, Δ_{ij} digunakan untuk mengevaluasi apakah solusi saat ini dapat diperbaiki lebih lanjut.
   d) Melakukan pemeriksaan tanda dari setiap nilai Δ_{ij}
   Apabila seluruh nilai $\Delta_{ij} \geq 0$, maka solusi yang diperoleh dinyatakan optimal. Sebaliknya, jika terdapat nilai $\Delta_{ij} < 0$, kondisi tersebut menunjukkan bahwa total biaya masih dapat dikurangi melalui penyesuaian alokasi. Sel dengan nilai Δ_{ij} negatif terbesar dipilih sebagai *entering variable*.
   e) Melakukan penyesuaian alokasi menggunakan metode stepping stone.
   Jika seluruh nilai $\Delta_{ij} \geq 0$ maka tahap ini dilewati, namun jika ada nilai $\Delta_{ij} < 0$, maka proses ini dilakukan dengan membentuk siklus tertutup (*loop*) yang menghubungkan sel *entering variable* dengan beberapa sel basis. Barang dialokasikan ke *entering variable* sesuai pola penjumlahan dan pengurangan bergantian di sepanjang siklus tersebut, hingga mencapai batas maksimum yang masih memenuhi kendala pasokan dan permintaan.
   f) Setelah dilakukan penyesuaian, tabel alokasi diperbarui dan diulang kembali proses dari Langkah b), yaitu menghitung nilai U_i, V_j, dan Δ_{ij} yang baru. Proses ini dilakukan berulang kali hingga semua nilai Δ_{ij} bernilai non-negatif, yang menandakan bahwa solusi yang diperoleh sudah optimal dan efisien dari segi biaya transportasi.
   g) Menghitung total biaya transportasi sebagai solusi optimal
   Setelah seluruh alokasi diperoleh, maka total biaya transportasi:
   $$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

EQUIVA
Journal of Mathematics & Information Technology
Vol. 03, No. 02, Tahun
ISSN 3046-6792

3.2 Alur Penelitian

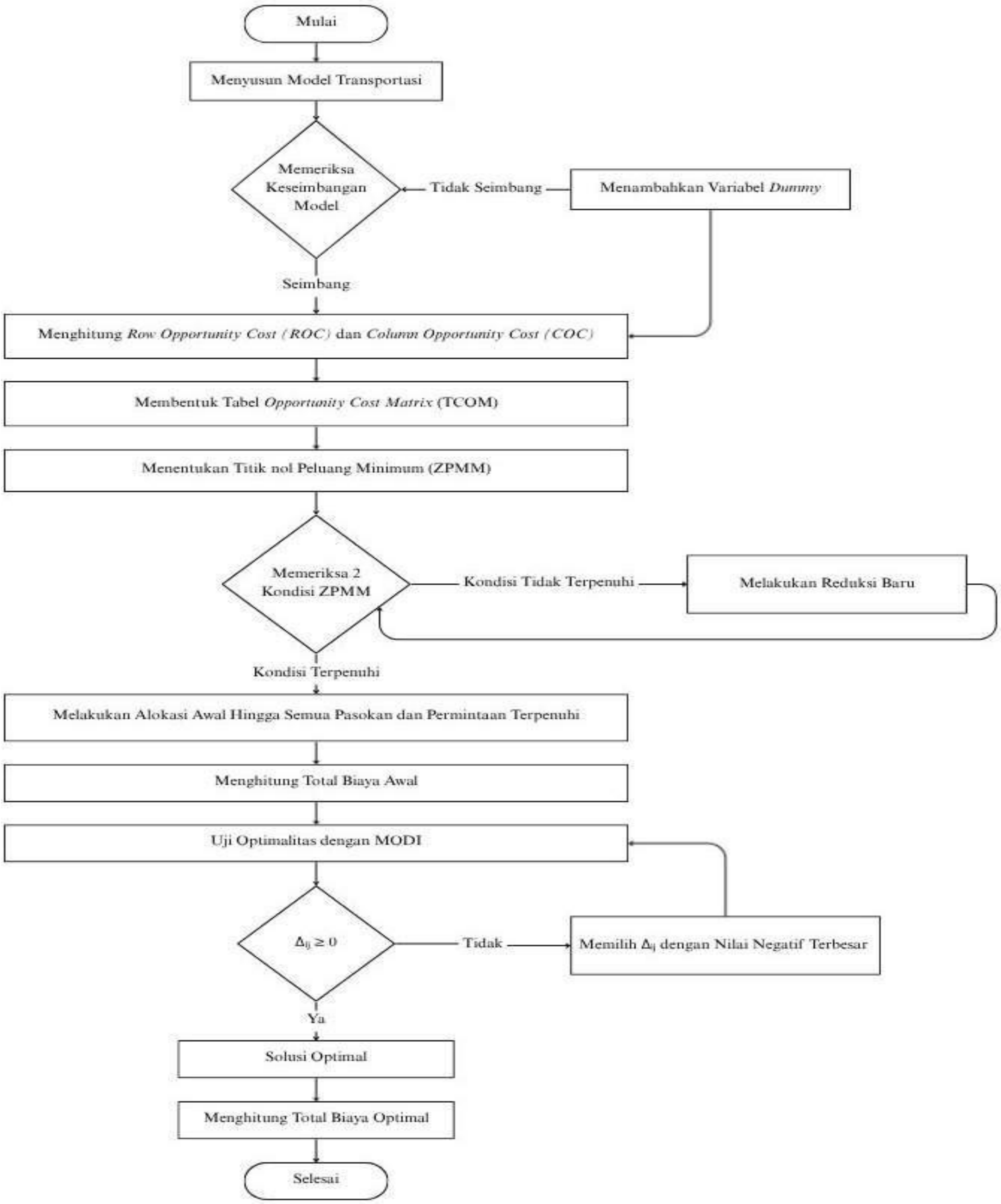


DIAGRAM 1. *Flowchart* metode TCOM dengan ZPMM dan uji optimalitas MODI

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Masalah Transportasi Seimbang

Langkah 1: Pembentukan Tabel Transportasi
Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data sekunder diambil dari jurnal yang membahas masalah transpoertasi berupa distribusi vaksin Hepatitis B pada PT. XYZ [6], dengan biaya, pasokan, dan permintaan seperti pada tabel berikut:

Ke / Dari	G_1	G_2	G_3	*Supply*
P_1	27200	31700	43200	600
P_2	27300	31600	42700	355
P_3	27500	31900	43100	334
Demand	340	374	575	1289

Kasus ini bersifat seimbang (*balanced*) karena total pasokan = total permintaan.

Ke / Dari	G_1	G_2	G_3	*Supply*
P_1	27200	31700	43200	600
P_2	27300	31600	42700	355
P_3	27500	31900	43100	334
Demand	340	374	575	1289

Langkah 2: Mereduksi baris (*Row Opportunity Cost* (ROC))
Untuk setiap baris, mengurangi setiap elemen dengan nilai minimum pada baris tersebut.
Baris minimum:
$P_1: min = 27200$
$P_2: min = 27300$
$P_3: min = 27500$
$ROC = c_{ij} - row\_min$:
$\boldsymbol{P^1}$: [0, 4500, 16000]
$\boldsymbol{P^2}$: [0, 4300, 15400]
$\boldsymbol{P^3}$: [0, 4400, 15600]

Langkah 3: Mereduksi kolom (*Column Opportunity Cost* (COC))

Untuk setiap kolom, mengurangi setiap elemen dengan nilai minimum pada kolom tersebut.
Kolom minimum:
G_1: $min = 27200$
G_2: $min = 31600$
G_3: $min = 42700$
$COC = c_{ij} - col\_min$:
$\boldsymbol{P^1}$: [0, 100, 500]
$\boldsymbol{P^2}$: [100, 0, 0]
$\boldsymbol{P^3}$: [300, 300, 400]
Langkah 4: Membentuk *Total Opportunity Cost Matrix* (TOCM)
Dengan rumus $TOCM_{ij} = ROC_{ij} + COC_{ij}$, diperoleh matriks TOCM:

Ke / Dari	G_1	G_2	G_3	*Supply*
P_1	0	4600	16500	600
P_2	100	4300	15400	355
P_3	300	4700	16000	334
Demand	340	374	575	1289

Langkah 5: Penerapan *Zero Point Minimum Method* (ZPMM)
Mengurangi setiap entri baris dengan nilai minimum baris yang sesuai kemudian mgurangi setiap entri kolom dengan nilai minimum kolom yang sesuai, sehingga diperoleh tabel ZPMM sebagai berikut

Ke / Dari	G_1	G_2	G_3	*Supply*
P_1	0	400	1200	600
P_2	0	400	0	355
P_3	0	200	400	334
Demand	340	374	575	1289

Langkah 6: Memeriksa dua kondisi pada tabel ZPMM tersebut
Pemeriksaan pada dua kondisi:
(a) Permintaan setiap kolom ≤ total pasokan dari kolom-kolom yang biaya reduksinya nol.
(b) Pasokan setiap baris ≤ total permintaan dari baris-baris yang biaya reduksinya nol.
Kondisi pada tabel diatas belum memenuhi dikarenakan
Kondisi (a) tidak semua terpenuhi (G2 dan G3 gagal).
Kondisi (b) tidak semua terpenuhi (P1 gagal).
maka perlu mereduksi matriks

EQUIVA
Journal of Mathematics & Information Technology
Vol. 03, No. 02, Tahun
ISSN 3046-6792

Langkah 7: Pembentukan matriks reduksi baru

Ke / Dari	G_1	G_2	G_3	*Supply*
P_1	0	400	1200	600
P_2	0	0	0	355
P_3	0	200	400	334
Demand	340	374	575	1289

Diperoleh:

Ke / Dari	G_1	G_2	G_3	*Supply*
P_1	0	200	1000	600
P_2	200	0	0	355
P_3	0	0	200	334
Demand	340	374	575	1289

Kondisi tabel diatas belum memenuhi dikarenakan
Kondisi (a) tidak semua terpenuhi (G3 gagal).
Kondisi (b) tidak semua terpenuhi (P1 gagal).
maka perlu mereduksi matriks lagi

Ke / Dari	G_1	G_2	G_3	*Supply*
P_1	0	200	1000	600
P_2	200	0	0	355
P_3	0	0	200	334
Demand	340	374	575	1289

Diperoleh:

Ke / Dari	G_1	G_2	G_3	*Supply*

EQUIVA
Journal of Mathematics & Information Technology
Vol. 03, No. 02, Tahun
ISSN 3046-6792

P_1	0	0	800	600
P_2	400	0	0	355
P_3	200	0	200	334
Demand	340	374	575	1289

Kondisi tabel diatas belum memenuhi dikarenakan
Kondisi (a) tidak semua terpenuhi (G3 gagal).
maka perlu mereduksi matriks lagi

Ke / Dari	G_1	G_2	G_3	*Supply*
P_1	0	0	800	600
P_2	400	0	0	355
P_3	200	0	200	334
Demand	340	374	575	1289

Diperoleh:

Ke / Dari	G_1	G_2	G_3	*Supply*
P_1	0	200	800	600
P_2	400	200	0	355
P_3	0	0	0	334
Demand	340	374	575	1289

Kondisi diatas belum memenuhi dikarenakan
Kondisi (a) tidak semua terpenuhi (G3 gagal).
maka perlu mereduksi matriks lagi

Ke / Dari	G_1	G_2	G_3	*Supply*

EQUIVA
Journal of Mathematics & Information Technology
Vol. 03, No. 02, Tahun
ISSN 3046-6792

P_1	0	200	800	600
P_2	4 0	200	0	355
P_3	0	0	0	334
Demand	340	374	575	1289

Diperoleh:

Ke / Dari	G_1	G_2	G_3	*Supply*
P_1	0	0	600	600
P_2	600	200	0	355
P_3	200	0	0	334
Demand	340	374	575	1289

Tabel tersebut sudah memenuhi kondisi (a) dan (b).

Langkah 8: Mengalokasikan biaya
Karena matriks sudah memenuhi kedua kondisi tersebut, maka bisa dialokasikan biayanya.

Ke / Dari	G_1		G_2		G_3		*Supply*
P_1	340	27200	260	31700		43200	600
P_2		27300		31600	355	42700	355
P_3		27500	114	31900	220	43100	334
Demand	340		374		575		1289

Langkah 9: Menghitung total biaya solusi awal

$$Z_{min} = (340 \times 27.200) + (260 \times 31.700) + (355 \times 42.700) + (220 \times 43.100) + (114 \times 31.900) = 45.767.100$$

Menentukan Solusi Optimal Menggunakan MODI

Langkah 1: Menentukan Tabel Solusi Awal

Ke / Dari	G_1		G_2		G_3		*Supply*
P_1	340	27200	260	31700		43200	600
P_2		27300		31600	355	42700	355
P_3		27500	114	31900	220	43100	334
Demand	340		374		575		1289

Langkah 2: Menentukan nilai U_i dan V_j yang ditetapkan berdasarkan sel yang memiliki alokasi (variabel basis)

$C_{11} = U_1 + V_1 \rightarrow 27200 = 0 + V_1 \rightarrow V_1 = 27200$
$C_{12} = U_1 + V_2 \rightarrow 31700 = 0 + V_2 \rightarrow V_2 = 31700$
$C_{32} = U_3 + V_2 \rightarrow 31900 = U_3 + 31700 \rightarrow U_3 = 200$
$C_{33} = U_3 + V_3 \rightarrow 43100 = 200 + V_3 \rightarrow V_3 = 42900$
$C_{23} = U_2 + V_3 \rightarrow 42700 = U_2 + 42900 \rightarrow U_2 =- 200$

Langkah 3: Menghitung $\Delta_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$ untuk setiap variabel non-basis:

$\Delta_{13} = C_{13} - (U_1 + V_3) = 43200 - (0 + 42900) = 300$
$\Delta_{21} = C_{21} - (U_2 + V_1) = 27300 - (-200 + 27200) = 300$
$\Delta_{22} = C_{22} - (U_2 + V_2) = 31600 - (-200 + 31700) = 100$
$\Delta_{31} = C_{31} - (U_3 + V_1) = 27500 - (200 + 27200) = 100$

Langkah 4: Melakukan pemeriksaan tanda dari setiap nilai Δ_{ij}

Karena semua nilai $\Delta_{ij} \geq 0$, maka solusi yang ada sudah optimal. Berikut ini tabel hasil iterasi 1:

Ke / Dari	G_1		G_2		G_3		*Supply*
P_1	340	27200	260	31700		43200	600
P_2		27300		31600	355	42700	355
P_3		27500	114	31900	220	43100	334
Demand	340		374		575		1289

Langkah 4: Menghitung biaya minimum sebagai solusi optimal pada masalah transportasi ini:

$Z_{min} = (340 \times 27.200) + (260 \times 31.700) + (355 \times 42.700)$
$+ (220 \times 43.100) + (114 \times 31.900) = 45.767.100$

4.2 Masalah Transportasi Tidak Seimbang (*supply* > *demand*)

Langkah 1: Pembentukan Tabel Transportasi
Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data sekunder diambil dari jurnal yang membahas masalah transpoertasi berupa distribusi jagung[7], dengan biaya, pasokan, dan permintaan seperti pada tabel berikut:

Ke / Dari	G_1	G_2	G_3	*Supply*
P_1	20	5	8	100
P_2	15	20	10	70
P_3	25	10	19	60
Demand	50	110	40	230 200

Kasus ini bersifat tidak seimbang karena total pasokan > total permintaan, maka perlu ditambahkan kolom *dummy*.

Ke / Dari	G_1	G_2	G_3	*Dummy*	*Supply*
P_1	20	5	8	0	100
P_2	15	20	10	0	70
P_3	25	10	19	0	60
Demand	50	110	40	30	230

Langkah 2: Mereduksi baris (*Row Opportunity Cost* (ROC))
Untuk setiap baris, mengurangi setiap elemen dengan nilai minimum pada baris tersebut.
Baris minimum:
$P_1: min = 0$
$P_2: min = 0$
$P_3: min = 0$
$ROC = c_{ij} - row\_min$:
$\boldsymbol{P_1}$:[20, 5, 8, 0]
$\boldsymbol{P_2}$:[15, 20, 10, 0]
$\boldsymbol{P_3}$:[25, 10, 19, 0]

Langkah 3: Mereduksi kolom (*Column Opportunity Cost* (COC))
Untuk setiap kolom, mengurangi setiap elemen dengan nilai minimum pada kolom tersebut.
Kolom minimum:
$G_1: min = 15$
$G_2: min = 5$

EQUIVA
Journal of Mathematics & Information Technology
Vol. 03, No. 02, Tahun
ISSN 3046-6792

G_3: $min = 8$
G_4:$min = 0$
$COC = c_{ij} - col\_min$:
$\boldsymbol{P_1}$:[5, 0, 0, 0]
$\boldsymbol{P_2}$: [0, 15, 2, 0]
$\boldsymbol{P_3}$: [0, 5, 11, 0]

Langkah 4: Membentuk Total Opportunity Cost Matrix (TOCM)
Dengan rumus $TOCM_{ij} = ROC_{ij} + COC_{ij}$, diperoleh matriks TOCM:

Ke / Dari	G_1	G_2	G_3	*Dummy*	*Supply*
P_1	25	5	13	0	100
P_2	15	35	12	0	70
P_3	35	15	30	0	60
Demand	50	110	40	30	230

Langkah 5: Penerapan *Zero Point Minimum Method* (ZPMM)
Mengurangi setiap entri baris dengan nilai minimum baris yang sesuai kemudian mgurangi setiap entri kolom dengan nilai minimum kolom yang sesuai, sehingga diperoleh tabel ZPMM sebagai berikut

Ke / Dari	G_1	G_2	G_3	*Dummy*	*Supply*
P_1	10	0	1	0	100
P_2	0	30	0	0	70
P_3	20	10	18	0	60
Demand	50	110	40	30	230

Langkah 6: Memeriksa dua kondisi pada tabel ZPMM tersebut
Pemeriksaan pada dua kondisi berikut:
(c) Permintaan setiap kolom ≤ total pasokan dari kolom-kolom yang biaya reduksinya nol.
(d) Pasokan setiap baris ≤ total permintaan dari baris-baris yang biaya reduksinya nol.
Kondisi pada tabel diatas belum memenuhi kondisi (a) dan (b) dikarenakan
Kondisi (a) tidak semua terpenuhi (G_2 gagal).
Kondisi (b) tidak semua terpenuhi (P_3 gagal).
maka perlu reduksi matriks

Langkah 7: Pembentukan matriks reduksi baru

Ke / Dari	G_1	G_2	G_3	*Dummy*	*Supply*
P_1	10	0	1	0	100
P_2	0	30	0	0	70
P_3	20	10	18	0	60
Demand	50	110	40	30	230

Diperoleh

Ke / Dari	G_1	G_2	G_3	*Dummy*	*Supply*
P_1	9	0	0	1	100
P_2	0	31	0	1	70
P_3	19	10	17	0	60
Demand	50	110	40	30	230

Kondisi pada tabel diatas belum memenuhi dikarenakan
Kondisi (a) tidak semua terpenuhi (G_2 gagal).
Kondisi (b) tidak semua terpenuhi (P_3 gagal).
maka perlu reduksi matriks

Ke / Dari	G_1	G_2	G_3	*Dummy*	*Supply*
P_1	9	0	0		100
P_2	0	31	0		70
P_3	19	10	17	(	60
Demand	50	110	40	30	230

Diperoleh:

Ke / Dari	G_1	G_2	G_3	*Dummy*	*Supply*

P_1	$\boxed{9}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{11}$	100
P_2	$\boxed{0}$	$\boxed{31}$	$\boxed{0}$	$\boxed{11}$	70
P_3	$\boxed{9}$	$\boxed{0}$	$\boxed{7}$	$\boxed{0}$	60
Demand	50	110	40	30	230

Tabel tersebut sudah memenuhi kondisi (a) dan (b).

Langkah 8: Mengalokasikan biaya
Karena matriks sudah memenuhi kedua kondisi tersebut, maka bisa dialokasikan biayanya.

Ke / Dari	G_1	G_2	G_3	*Dummy*	*Supply*
P_1	$\boxed{20}$	80 $\boxed{5}$	20 $\boxed{8}$	$\boxed{0}$	100
P_2	50 $\boxed{15}$	$\boxed{20}$	20 $\boxed{10}$	$\boxed{0}$	70
P_3	$\boxed{25}$	30 $\boxed{10}$	$\boxed{19}$	30 $\boxed{0}$	60
Demand	50	110	40	30	230

Langkah 9: Menghitung total biaya solusi awal

$$Z_{min} = (5 \times 80) + (8 \times 20) + (15 \times 50) + (10 \times 20) + (10 \times 30) + (0 \times 30) = 1.810$$

Menentukan Solusi Optimal Menggunakan MODI
Langkah 1: Menentukan Tabel Solusi Awal

Ke / Dari	G_1	G_2	G_3	*Dummy*	*Supply*
P_1	$\boxed{20}$	80 $\boxed{5}$	20 $\boxed{8}$	$\boxed{0}$	100
P_2	50 $\boxed{15}$	$\boxed{20}$	20 $\boxed{10}$	$\boxed{0}$	70
P_3	$\boxed{25}$	30 $\boxed{10}$	$\boxed{19}$	30 $\boxed{0}$	60
Demand	50	110	40	30	230

Langkah 2: Menentukan nilai U_i dan V_j yang ditetapkan berdasarkan sel yang memiliki alokasi (variabel basis)

EQUIVA
Journal of Mathematics & Information Technology
Vol. 03, No. 02, Tahun
ISSN 3046-6792

$C_{12} = U_1 + V_2 \rightarrow 5 = 0 + V_2 \rightarrow V_2 = 5$
$C_{13} = U_1 + V_3 \rightarrow 8 = 0 + V_3 \rightarrow V_3 = 8$
$C_{23} = U_2 + V_3 \rightarrow 10 = U_2 + 8 \rightarrow U_2 = 2$
$C_{21} = U_2 + V_1 \rightarrow 15 = 2 + V_1 \rightarrow V_1 = 13$
$C_{32} = U_3 + V_2 \rightarrow 10 = U_3 + 5 \rightarrow U_3 = 5$
$C_{34} = U_3 + V_4 \rightarrow 0 = 5 + V_4 \rightarrow V_4 = -5$

Langkah 3: Menghitung $\Delta_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$ untuk setiap variabel non-basis:

$\Delta_{11} = C_{11} - (U_1 + V_1) = 20 - (0 + 13) = 7$
$\Delta_{14} = C_{14} - (U_1 + V_4) = 0 - (0 + (-5)) = 5$
$\Delta_{22} = C_{22} - (U_2 + V_2) = 20 - (2 + 5) = 13$
$\Delta_{24} = C_{24} - (U_2 + V_4) = 0 - (2 + (-5)) = 3$
$\Delta_{31} = C_{31} - (U_3 + V_1) = 25 - (5 + 13) = 7$
$\Delta_{33} = C_{33} - (U_3 + V_3) = 19 - (5 + 8) = 6$

Langkah 4: Melakukan pemeriksaan tanda dari setiap nilai Δ_{ij}

Karena semua nilai $\Delta_{ij} \geq 0$, maka solusi yang ada sudah optimal. Berikut ini tabel hasil iterasi 1:

Ke / Dari	G_1	G_2	G_3	*Dummy*	*Supply*
P_1	$\boxed{20}$	80 $\boxed{5}$	20 $\boxed{8}$	$\boxed{0}$	100
P_2	50 $\boxed{15}$	$\boxed{20}$	20 $\boxed{10}$	$\boxed{0}$	70
P_3	$\boxed{25}$	30 $\boxed{10}$	$\boxed{19}$	30 $\boxed{0}$	60
Demand	50	110	40	30	230

Langkah 5: Menghitung biaya minimum sebagai solusi optimal pada masalah transportasi ini:

$$Z_{min} = (5 \times 80) + (8 \times 20) + (15 \times 50) + (10 \times 20) + (10 \times 30) + (0 \times 30) = 1.810$$

4.3 Masalah Transportasi Tidak Seimbang (*supply* < *demand*)

Langkah 1: Pembentukan Tabel Transportasi

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data sekunder diambil dari jurnal yang membahas masalah transpoertasi berupa distribusi semen PT. Semen Bosowa Maros[8], dengan biaya, pasokan, dan permintaan seperti pada tabel berikut:

Ke / Dari	G_1	G_2	G_3	G_4	*Supply*
P_1	$\boxed{3000}$	$\boxed{6000}$	$\boxed{3000}$	$\boxed{8000}$	600000
P_2	$\boxed{6000}$	$\boxed{6000}$	$\boxed{8.000}$	$\boxed{4000}$	400000

Demand	140400	280800	468000	124800	1000000 1014000

Kasus ini bersifat tidak seimbangbkarena total pasokan < total permintaan, maka perlu ditambahkan baris *dummy*.

Ke / Dari	G_1	G_2	G_3	G_4	*Supply*
P_1	3000	6000	3000	8000	600000
P_2	6000	6000	8000	4000	400000
Dummy	0	0	0	0	14000
Demand	140400	280800	468000	124800	1014000

Langkah 2: Mereduksi baris (Row Opportunity Cost (ROC))
Untuk setiap baris, mengurangi setiap elemen dengan nilai minimum pada baris tersebut.
Baris minimum:
$P_1: min = 3000$
$P_2: min = 4000$
$P_3: min = 0$
$ROC = c_{ij} - row\_min$:
$\boldsymbol{P^1}$: [0, 3000, 0, 5000]
$\boldsymbol{P^2}$: [2000, 2000, 4000, 0]
$\boldsymbol{P^3}$: [0, 0, 0, 0]

Langkah 3: Mereduksi kolom (Column Opportunity Cost, COC)
Untuk setiap kolom, mengurangi setiap elemen dengan nilai minimum pada kolom tersebut.
Kolom minimum:
$G_1: min = 0$
$G_2: min = 0$
$G_3: min = 0$
$COC = c_{ij} - col\_min$:
$\boldsymbol{p_1}$:[3000, 6000, 3000, 8000]
$\boldsymbol{p_2}$: [6000, 6000, 8000, 4000]
$\boldsymbol{p_3}$:[0, 0, 0, 0]

Langkah 4: Membentuk Total Opportunity Cost Matrix (TOCM)
Dengan rumus $TOCM_{ij} = ROC_{ij} + COC_{ij}$, diperoleh matriks TOCM:

Ke / Dari	G_1	G_2	G_3	G_4	*Supply*
P_1	3000	9000	3000	1300(	600000
P_2	8000	8000	12000	4000	400000

EQUIVA
Journal of Mathematics & Information Technology
Vol. 03, No. 02, Tahun
ISSN 3046-6792

Dummy	0	0	0	0	14000
Demand	140400	280800	468000	124800	1014000

Langkah 5: Penerapan *Zero Point Minimum Method* (ZPMM)
Mengurangi setiap entri baris dengan nilai minimum baris yang sesuai kemudian mgurangi setiap entri kolom dengan nilai minimum kolom yang sesuai, sehingga diperoleh tabel ZPMM sebagai berikut

Ke / Dari	G_1	G_2	G_3	G_4	*Supply*
P_1	0	6000	0	10000	600000
P_2	4000	4000	8000	0	400000
Dummy	0	0	0	0	14000
Demand	140400	280800	468000	124800	1014000

Langkah 6: Melakukan uji optimalitas:
Melakukan pemeriksaan dua kondisi:
(a) Permintaan setiap kolom ≤ total pasokan dari kolom-kolom yang biaya reduksinya nol.
(b) Pasokan setiap baris ≤ total permintaan dari baris-baris yang biaya reduksinya nol.
Kondisi pada tabel diatas belum memenuhi dikarenakan
Kondisi (a) tidak semua terpenuhi (G2 gagal).
Kondisi (b) tidak semua terpenuhi (P2 gagal).
maka perlu reduksi matriks

Langkah 7: Pembentukan matriks reduksi baru

Ke / Dari	G_1	G_2	G_3	G_4	*Supply*
P_1	0	6000	0	100 0	600000
P_2	4000	4000	8000	0	400000
Dummy	0	0	0	0	14000
Demand	140400	280800	468000	124800	1014000

Diperoleh:

Ke / Dari	G_1	G_2	G_3	G_4	*Supply*

P_1	[0]	[6000]	[0]	[14000]	600000
P_2	[0]	[0]	[4000]	[0]	400000
Dummy	[0]	[0]	[0]	[4000]	14000
Demand	140400	280800	468000	124800	1014000

Tabel tersebut sudah memenuhi kondisi (a) dan (b).

Langkah 8: Mengalokasikan biaya
Karena matriks sudah memenuhi kedua kondisi tersebut, maka bisa dialokasikan biayanya

Ke / Dari	G_1	G_2	G_3	G_4	*Supply*
P_1	140400 [3000]	[6000]	459600 [3000]	[8000]	600000
P_2	[6000]	275200 [6000]	[8000]	124800 [4000]	400000
Dummy	[0]	5600 [0]	8400 [0]	[0]	14000
Demand	140400	280800	468000	124800	1014000

Langkah 9: Menghitung total biaya solusi awal

$$Z_{min} = (140400 \times 3000) + (459600 \times 3000) + (124800 \times 4000) + (275200 \times 6000) + (8400 \times 0) + (5600 \times 0) = 3.950.400.000$$

Menentukan Solusi Optimal Menggunakan MODI

Langkah 1: Menentukan Tabel Solusi Awal

Ke / Dari	G_1	G_2	G_3	G_4	*Supply*
P_1	140400 [3000]	[6000]	459600 [3000]	[8000]	600000
P_2	[6000]	275200 [6000]	[8000]	124800 [4000]	400000
Dummy	[0]	5600 [0]	8400 [0]	[0]	14000
Demand	140400	280800	468000	124800	1014000

Langkah 2: Menentukan nilai U_i dan V_j yang ditetapkan berdasarkan sel yang memiliki alokasi (variabel basis)

$C_{11} = U_1 + V_1 \rightarrow 3000 = 0 + V_1 \rightarrow V_1 = 3000$
$C_{13} = U_1 + V_3 \rightarrow 3000 = 0 + V_3 \rightarrow V_3 = 3000$
$C_{33} = U_3 + V_3 \rightarrow 0 = U_3 + 3000 \rightarrow U_3 = -3000$
$C_{32} = U_3 + V_2 \rightarrow 0 = -3000 + V_2 \rightarrow V_2 = 3000$
$C_{22} = U_2 + V_2 \rightarrow 6000 = U_2 + 3000 \rightarrow U_2 = 3000$
$C_{24} = U_2 + V_4 \rightarrow 4000 = 3000 + V_4 \rightarrow V_4 = 1000$

Langkah 3: Menghitung $\Delta_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$ untuk setiap variabel non-basis:

$\Delta_{12} = C_{12} - (U_1 + V_2) = 6000 - (0 + 3000) = 3000$
$\Delta_{14} = C_{14} - (U_1 + V_4) = 8000 - (0 + 1000) = 7000$
$\Delta_{21} = C_{21} - (U_2 + V_1) = 6000 - (3000 + 3000) = 0$
$\Delta_{23} = C_{23} - (U_2 + V_3) = 8000 - (3000 + 3000) = 2000$
$\Delta_{31} = C_{31} - (U_3 + V_1) = 0 - (-3000 + 3000) = 0$
$\Delta_{34} = C_{34} - (U_3 + V_4) = 0 - (-3000 + 1000) = 2000$

Langkah 4: Melakukan pemeriksaan tanda dari setiap nilai Δ_{ij}

Karena semua nilai $\Delta_{ij} \geq 0$, maka solusi yang ada sudah optimal. Berikut ini tabel hasil iterasi optimal:

Ke / Dari	G_1	G_2	G_3	G_4	*Supply*
P_1	140400 [3000]	[6000]	459600 [3000]	[8000]	600000
P_2	[6000]	275200 [6000]	[8000]	124800 [4000]	400000
Dummy	[0]	5600 [0]	8400 [0]	[0]	14000
Demand	140400	280800	468000	124800	1014000

Langkah 5: Menghitung biaya minimum sebagai solusi optimal pada masalah transportasi ini:

$$Z_{min} = (140400 \times 3000) + (459600 \times 3000) + (275200 \times 6000) + (124800 \times 4000) + (5600 \times 0) + (8400 \times 0) = 3.950.400.000$$

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis dari tiga jenis kasus, yaitu kondisi seimbang, kondisi tidak seimbang meliputasi kelebihan pasokan (*supply* > *demand*) dan kelebihan permintaan (*demand* > *supply*). Dapat disimpulkan bahwa penerapan *Transportation Optimality Complementary Method* (TOCM) yang dikombinasikan dengan *Zero Point Minimum Method* (ZPMM) mampu menghasilkan solusi awal yang efisien serta mendekati kondisi optimal. Kombinasi kedua metode ini terbukti efektif dalam menentukan alokasi awal distribusi yang memenuhi semua kendala pasokan dan permintaan tanpa memerlukan banyak iterasi perbaikan. Proses reduksi baris dan kolom serta identifikasi titik nol minimum pada metode ZPMM berperan penting dalam mempercepat konvergensi menuju solusi optimal.

Hasil uji optimalitas menggunakan *Modified Distribution Method* (MODI) menunjukkan bahwa solusi awal yang diperoleh melalui TOCM-ZPMM telah memenuhi kriteria optimalitas dengan tingkat efisiensi yang tinggi. Pendekatan gabungan ini memberikan manfaat signifikan dalam menghemat waktu perhitungan, menekan total biaya transportasi, dan meningkatkan efektivitas sistem distribusi. Dengan demikian, pendekatan gabungan TOCM-ZPMM dan MODI terbukti efektif dalam mengurangi total biaya transportasi serta meningkatkan efisiensi sistem distribusi. Metode ini dapat digunakan sebagai pilihan strategis untuk menyelesaikan masalah transportasi dalam bidang logistik, distribusi barang, maupun perencanaan rantai pasok yang kompleks.

REFERENSI

[1] S. S. Ahmed, G. Paul, A. Ramatu, S. B. Nafisat, and N. M. Usman, "Application of Transportation Problem Models on Cattle Business in Niger State Using Russell's Approximation Method," *J. Appl. Sci. Environ. Manag.*, vol. 27, no. 9, pp. 1989–1994, 2023, doi: 10.4314/jasem.v27i9.14.

[2] H. Fathima, S. Devi, S. K. Prabha, and S. Sangeetha, "Application of RAM in Dual-Hesitant Fuzzy Transportation Problem," vol. 13, no. 2, pp. 924–930, 2022.

[3] A. Ammar Saed Bilkour and V. Vincent Henry, "Initial Basic Feasible Solution for Transportation Problem using TOCM with Zero Point Minimum Method," *Int. J. Intell. Syst. Appl. Eng. IJISAE*, vol. 12, no. 21s, pp. 3332–3343, 2024, [Online]. Available: www.ijisae.org

[4] Ö. Kirca and A. Şatir, "A Heuristic for Obtaining and Initial Solution for the Transportation Problem," *J. Oper. Res. Soc.*, vol. 41, no. 9, pp. 865–871, Sep. 1990, doi: 10.1057/jors.1990.124.

[5] W. L. Winston, *Operations Research applications and Algorithms*, vol. 73, no. C. 1971. doi: 10.1016/S0076-5392(08)62705-8.

[6] R. Lestari, T. Romadhon, and M. Fauzi, "Implementasi Model Transportasi Distribusi Produk Vaksin Hepatitis B Menggunakan Metode Least Cost Dan Modified Distribution," *J. Lebesgue J. Ilm. Pendidik. Mat. Mat. dan Stat.*, vol. 2, no. 2, pp. 180–193, 2021, doi: 10.46306/lb.v2i2.69.

[7] P. Gultom, F. Wahyudi, A. Almunawar, and F. Hidayat, "Tantangan dan Solusi dalam Transfortasi Tak Seimbang Menuju Efisiensi Logistik," no. September, 2025.

[8] M. Z. Tumcala, Elfreda Aplonia Lau, and D. Solihin, "Analisis Penerapan Metode Transportasi (Vogel ' s Approximation Method Dan Modified Distribution) Dalam Upaya Mengoptimalkan Biaya Distribusi Pada PT . Semen Bosowa," pp. 1–8, 2014.

[9] P. Affandi, *Buku Ajar Riset Operasi*. 2019.

[10] R. Aulia and P. Affandi, "Analisis Komparatif Vogel ' s Approximation Method dan Modified Vogel ' s Approximation Method dalam Optimalisasi Transportasi," vol. 3, pp. 1–8, 2025.

[11] P. Juman, S. Awal, and M. Transportasi, "pendistribusian barang dari sejumlah sumber ke sejumlah tujuan dan dapat," vol. 15, no. 1, pp. 27–45, 2021.

[12] P. Studi, M. Fakultas, M. Universitas, and L. Mangkurat, "Nurul Iftitah , 1 Pardi Affandi , 1 Akhmad Yusuf," vol. 14, no. 1, pp. 40–52, 2020.